

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XXII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг на олимпиадата по астрономия

I тур – 20 април 2019 г., гр. Стара Загора

Възрастова група IX-X клас – решения

1 задача. Космонавти изследователи. Вие участвате в космическа експедиция, която изследва екзопланета, лишена от атмосфера и обикаляща около далечна звезда. Планетата има радиус R и се върти около оста си с период P . Нейният спътник се движи по кръгова орбита над екватора на планетата в същата посока, в която тя се върти около оста си. Радиусът на орбитата на спътника е $2R$.

Земният звездолет влиза в кръгова екваториална орбита около планетата, като се движи в посока обратна на нейното околоосно въртене. Радиусът на орбитата му е $8R$, а орбиталният му период е $8P$. От звездолета на повърхността на планетата се спускат два малки кораба с двама космонавти изследователи – Вие и Ваш колега. Корабите кацат в две диаметрално противоположни точки от екватора.

- А) Вие излизате от вашия кораб и виждате в зенита спътника на планетата. След колко време спътникът ще прелети над точката, където е кацнал корабът на Вашия колега? Тук и в следващите две подусловия изразявайте времето в единици, равни на периода на въртене на планетата P .

- Б) През какъв интервал от време земният звездолет ще преминава през зенита за вас?

- В) Когато звездолетът се появява над хоризонта, Вие установявате радиовръзка с екипажа. Колко време ще можете да поддържате тази връзка непрекъснато до скриването на звездолета под хоризонта?

- Г) Да предположим, че планетата има същата маса и същия радиус като Земята. Ако Вашата маса заедно със скафандъра е 100 kg , то колко килограма ще тежите на екватора на планетата? Приемете, че планетата е с кълбовидна форма.

Решение:

Означаваме с T_0 и T орбиталните периоди на спътника и звездолета, а с r_0 и r радиусите на техните орбити. Използваме III закон на Кеплер, за да намерим периода на спътника:

$$\frac{r_0^3}{T_0^2} = \frac{r^3}{T^2}$$
$$T_0 = T \sqrt{\frac{r_0^3}{r^3}} = 8P \sqrt{\frac{2^3}{8^3}}$$
$$T_0 = P$$

Орбиталният период на спътника се оказва равен на периода на околоосно въртене на планетата. Най-вероятно и тя, и нейният спътник са приливно заключени и винаги остават обърнати с една и съща страна един към друг. Ако след кацането на планетата Вие виждате над себе си спътника, то той винаги ще остава там. Спътникът никога няма да се появи в небето над противоположната точка от екватора на планетата, където се намира Вашият колега.

Нека T_x е интервалът от време, през който Вие ще виждате звездолета да преминава през зенита за Вас. Тъй като звездолетът се движи в посока обратна на въртенето на планетата, то можем да напишем:

$$\frac{1}{T_x} = \frac{1}{P} + \frac{1}{T}$$

$$T_x = \frac{TP}{T + P} = \frac{8}{9}P$$

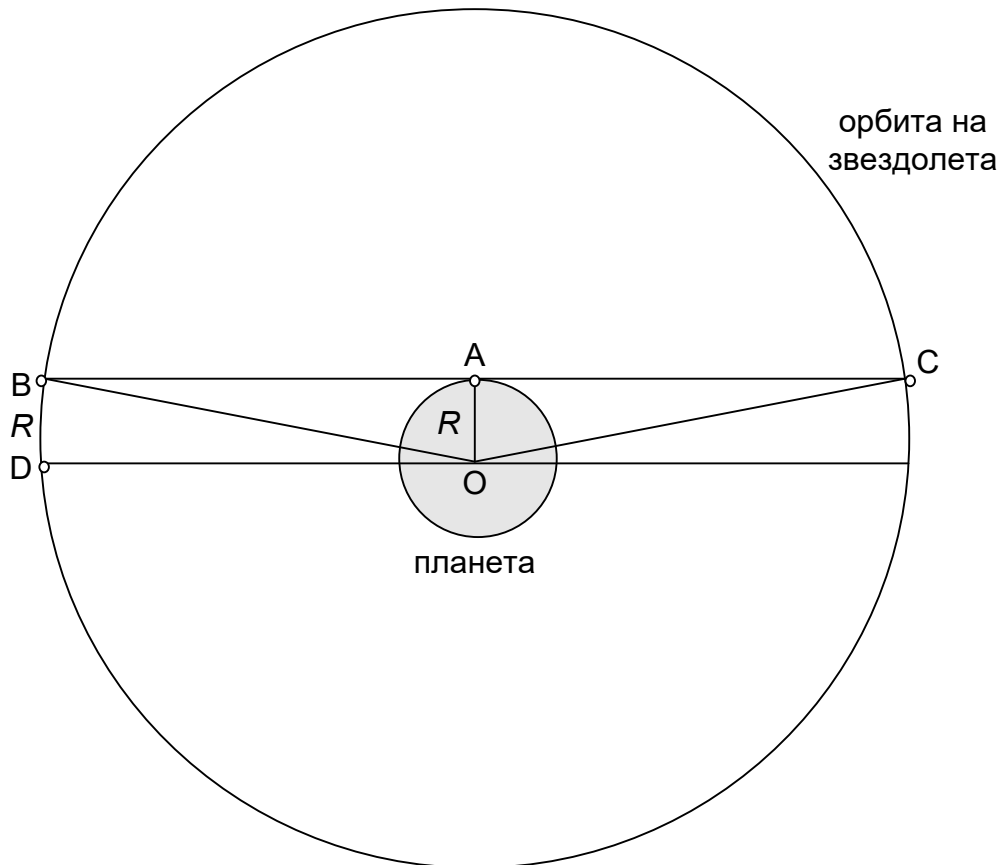
На схемата с А е отбелязано местоположението на космонавта, а с линията ВС е означен хоризонтът. След появата на звездолета над хоризонта, примерно в точка В, космонавтът ще може да поддържа радиовръзка с екипажа докато звездолетът не се скрие под хоризонта в точка С. Следователно космическият кораб ще измине над хоризонта дъгата ВС.

Ъгълът COB е по-малък от 180° с величина, равна на удвоения ъгъл DOB. Можем приблизително да оценим този ъгъл, като приемем, че дължината на дъгата DB е равна на R. Следователно:

$$\angle COB \approx 180^\circ - 2 \cdot \frac{R}{2\pi \cdot 8R} \cdot 360^\circ = 180^\circ \left(1 - \frac{1}{4\pi}\right) \approx 166^\circ$$

За да намерим времето, през което ще стане това, трябва да отчетем и факта, че самата планета се върти около оста си. Това е аналогично на ситуацията, при която планетата не се върти, а звездолетът обикаля около нея с период, равен на T_x . Търсеното време ще бъде:

$$t = \frac{166^\circ}{360^\circ} T_x \approx 0.41P$$



Ако далечната планета има масата M и радиуса на Земята, то ние трябва да пресметнем нейния период на въртене, който се оказва равен на орбиталния период на спътника. Отново използваме III закон на Кеплер:

$$\frac{(2R)^3}{P^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{8R^3}{\gamma M}} \approx 14300 \text{ s} \approx 4 \text{ часа}$$

Тази планета се върти 6 пъти по-бързо от Луната. Ако $\omega = 2\pi/P$ е ъгловата скорост на въртене на планетата, то центробежното ускорение, което ще има космонавтът на нейния екватор, ще е:

$$a = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \cdot R \approx 1.23 \text{ m/s}^2$$

Да сравним това със земното ускорение:

$$\frac{a}{g} \approx 0.126$$

Оттук следва, че на екватора на планетата космонавтът ще „олекне“ с около 13% от теглото си, или ще тежи около 87 kg.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За определяне на орбиталния период на спътника – 3 т.

За правилно заключение относно видимостта на спътника от обратната страна на планетата – 1 т.

За правилен теоретичен подход при определяне на времето за радиовръзка със звездолета – 5 т.

За правилен краен отговор – 1 т.

За правилен метод за определяне колко ще тежи космонавтът на планета с характеристиките на Земята – 3 т.

За верен числен отговор – 1 т.

2 задача. Звезда в комина. Вие сте ентузиазизиран старозагорски астроном, силно възмутен от светлинното замърсяване в във Вашия роден град. За да излезете пред авторитетните фактори с научно обосновано искане, Вие се затваряте на дъното на един от комините в промишлената зона на града. Нощем виждате само малко кръгче от звездното небе над Вас. Искате да докажете, че светенето на нощното небе в града е не 22^m , както е нормално, а 19^m на квадратна дъгова секунда и се губят цели 3 звездни величини от проникателната способност на телескопите. С Вас е единствено любимата ви черна котка, която не пречи с отразена светлина на Вашите наблюдения.

С новата си камера Вие измервате светенето на кръгчето нощно небе над Вас. После забелязвате, че една ярка звезда започва да се вижда в отвора на комина. Това е звездата Алмаак, γ Андромеда, от звездна величина 2.1^m . Измервате осветеността от нея и виждате, че е равна на осветеността от тази част от нощното небе, която се вижда в комина. Правите необходимите пресмятания и намирате радиуса на кръгчето небе, което виждате над Вас, в дъгови минути. Резултатът потвърждава предположението за загубата на 3 звездни величини.

- Височината на комина е 79 метра. Какъв е диаметърът на отвора на комина?

Решение:

Светенето на нощното небе се измерва в звездни величини на квадратна секунда. Площта на кръг от нощното небе с ъглов радиус ρ , изразен в квадратни дъгови секунди, е равна на $S = \pi\rho^2$. Изразяваме радиуса на кръга: $\rho = \sqrt{S/\pi}$.

Ако сравним осветеността, която идва от звездата, с осветеността, която идва от оградения от отвора на комина кръгла площадка от небето, при хипотеза за 19 звездна величина от квадратна секунда, може да определим броя на квадратните секунди, необходими да създадат тази осветеност.

Нека E_0 е осветеността, която създава една дъгова секунда.

Нека E_{st} е осветеността, която създава звездата Алмаак.

Нека N е броят на квадратните секунди, необходим за да се изравнят осветеностите от звездата и от нощното небе.

$$N = \frac{NE_o}{E_o} = \frac{E_{st}}{E_o} = 2.512^{m_o - m_{st}} = 5758798 \text{ кв. сек.}$$

Броят на квадратните секунди е площта на видимия отвор на комина, изразена в единици квадратни секунди. Може да намерим ъгловия радиус на отвора на комина:

$$\rho = \sqrt{S/\pi} = \sqrt{N/\pi} = 1354'' = 22.565' = 6.564 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Намираме линейния радиус на комина:

$$R = \rho h = 6.564 \cdot 10^{-3} \cdot 79 = 0.52 \text{ m}$$

Диаметърът на отвора на комина е :

$$D = 2R = 1.04 \text{ m}$$

Пренебрегваме звездите в полето, които частично компенсират поглъщането в атмосферата, защото влиянието и на двата фактора е много по-малко от ефекта предизвикан от светлинното замърсяване.

Критерии за оценяване (общо 14 т.):

За правилно алгебрично представяне на ъгловите ръзмери и площ на видимото от комина зрително поле – 4 т.

За правилен метод за пресмятане на осветеността от нощното небе – 4 т.

За сравняване с осветеността от звездата – 4 т.

За правилен краен отговор за височината на комина – 2 т.

3 задача. Черната дупка в М87. Вероятно Вие добре знаете, че миналата седмица бе оповестено публично първото директно получаване на изображение на черна дупка. Тя се намира в гигантската елиптична галактика М 87, която е най-масивният член на купа от галактики в съвездието Дева (Virgo cluster). Изображението е резултат от комбиниране на кадри, получени с телескопите, които са част от колаборацията Event Horizon Telescope (ЕНТ). С помощта на това наблюдение стана възможно да се тества Общата теория на относителността и да се определи директно масата на централната черна дупка.

Предлагаме Ви да повторите повторите тази оценка. За целта разполагате с полученото изображение на черната дупка в М87, като е даден и ъгловият му мащаб. Известно е също така, че червеното отместване, което се наблюдава в спектъра на галактиката М87 поради разширението на Вселената, е 0.00428. В центъра на изображението се вижда една кръгла тъмна област. Това е т.нар. сянка на черната дупка, т.е. областта около центъра, от която ние не получаваме никакво електромагнитно лъчение. Контрастът в тази област е изкуствено повишен. Съгласно теорията, радиусът на сянката е 2.6 пъти по-голям от радиуса на Шварцшилд на черната дупка. Използвайки изображението и дадените в условието данни, намерете масата на черната дупка в центъра на галактиката М87 (за предпочитане, в единици слънчеви маси).

Полезна информация:

- Скоростта **V**, с която една галактика се отдалечава от нас поради разширението на Вселената, се задава със закона на Хъбъл: **V=H.r**, където **r** е разстоянието до галактиката, а **H = 70 (km/s)/Mpc** е константата на Хъбъл.

- Радиус на Шварцшилд е радиусът на една мислена сфера около черната дупка, на чиято повърхност гравитационното поле е такова, че втора космическа скорост е равна на скоростта на светлината.

Решение:

Използвайки червеното отместване z на M87 намираме, че скоростта, с която тя се отдалечава от нас е:

$$v = c \cdot z = 1\,284 \text{ km/s}$$

От закона на Хъбъл следва, че разстоянието до нея е:

$$r = \frac{v}{H} = 18,34 \text{ Mpc}$$

От изображението измерваме, че видимият ъглов размер на сянката на черната дупка е $\delta \approx 18 \text{ mas}$ (*В зависимост от начина, по който изображението е разпечатано е възможно учениците да измерват стойност, която систематично, макар и слабо се различава от тази*)

По условие сянката има 2,6 пъти по-голям размер от радиуса на Шварцшилд, откъдето намираме, че този радиус се вижда под ъгъл $\delta_s \approx 7 \text{ mas}$.

Оттук можем да намерим, че линейният размер радиуса на Шварцшилд на тази черна дупка е:

$$R_s = r \cdot \delta [\text{rad}] \approx 1,91 \cdot 10^{13} \text{ m}$$

Понеже на повърхността, която се загражда от радиуса на Шварцшилд, втора космическа скорост е точно равна на скоростта на светлината, то можем да запишем, че:

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{R_s}},$$

където M е масата на черната дупка.

Оттук следва, че:

$$M = \frac{R_s \cdot c^2}{2 \cdot \gamma} \approx 1,29 \cdot 10^{40} \text{ kg} \approx 6,5 \cdot 10^9 M_{\text{sun}}$$

Оттук правим извода, че наистина е възможно това да е най-масивната известна черна дупка.

Впрочем, нейната маса е равна на толкова слънчеви маси, колкото човека са живели на Земята през 2000 г. ☺. Дали е случайно...

Критерии за оценяване (14т.):

- За намиране на скоростта на отдалечаване и числена стойност – **2т.**;
- За правилно намиране на разстоянието до M87 и числена стойност – **2т.**;
- За измервания по изображението и получаване на правдоподобна стойност на видимия ъглов размер на радиуса на Шварцшилд – **2т.**;
- За намиране на линейния размер на този радиус (получената стойност трябва да отговаря на предварително получените стойности на разстоянието и видимия ъглов размер) – **2т.**;
- За правилен израз за радиуса на Шварцшилд – **2т.**;
- За правилен краен израз за масата на черната дупка и правдоподобна стойност (съответстваща на получените преди това стойности) – **4т.**;

4 задача. Сложните движения на Луната. Разполагате с 12 снимки на Луната, заснети в 12 последователни пълнолуния (Фиг.2.). Първата от тях е направена в нощ, когато Луната освен в пълнолуние е била и недалеч от перигея на своята орбита. Понякога подобно съвпадение се нарича от журналистите „Суперлуна“.

• А) Опитайте се да начертаете орбитата на Луната, като използвате информацията от комплекта със снимките в пълнолуние. Приемете, че когато разстоянието до нея е максимално, то ще се изобразява с отсечка примерно 100

милиметра. Кръг с подобен радиус може да се помести на лист формат А4. Начертайте този кръг на листа. Цялата възстановена орбита на Луната ще се събере в кръга. Орбитата трябва да бъде построена така, че Луната да се движи по нея в посоката, в която би се виждала от наблюдател, издигнал се над северния полюс на Земята.

Разбира се, може да се работи и с по-малка окръжност, но точността на работата ще намалее. Направете пресмятанията за разстоянията до Луната в милиметри с точност 1-2 десети от милиметъра. Опитайте се да работите и графично с подобна точност.

След като нанесете всички точки на правилните разстояния и ъгли, прекарайте внимателно през тях крива, но не криволичеща, а линия, която плавно ги описва. Тази линия ще представлява схема на орбитата на Луната, построена в някакъв мащаб.

Дайте кратко описание на вашите действия и обяснение на методите, които използвате – особено това как сте пресметнали разстоянията в милиметри и ъглите между индивидуалните положения на Луната в градуси.

- Б) На 14 ноември 2016 година, когато е направена първата снимка, Луната е преминала през перигея на своята орбита. Разстоянието от Земята до Луната е било само 356512 км. Като използвате построената от Вас орбита на Луната направете необходимите измервания и определете голямата полуос на лунната орбита в километри. Периодът на обикаляне на Луната около Земята е 27.32 денонощия. Пресметнете масата на Земята.

$$\text{Гравитационна константа} \quad 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg.s}^2$$

Решение:

За да начертаем орбитата на Луната трябва да разполагаме с информация за нейното положение относно дадена координатна система. Ние разполагаме с изображения на Луната получени от Земята, които са с различни размери. Подразбира се, че те са правени с един същи уред и с едно и също фокусно разстояние. При тези условия разликата в размерите на лунните изображения се дължи на това, че Луната при различните пълнолуния е била на различни разстояния от нас. Имайки предвид, че ъгловите размери на Луната не са големи, то е в сила зависимостта между линейните размери D , ъгловите размери δ и разстоянието r : $\delta = D/r$. Оттук следва: $r = D/\delta$. (1)

Диаметрите на изображенията, с които разполагаме, представят в някакъв линейен мащаб ъгловите размери на Луната. Нека при най-малкото изображение на Луната, това от 10 юни 2017г., приемем да изобразяваме разстоянието с отсечка равна на 100 mm. Така ние вече разполагаме с разстоянието от горната формула. Понеже разстоянието е обратно пропорционално на видимия ъглов размер, а D е константа, която играе ролята на коефициент на пропорционалност, може да пресметнем стойността на D от горното уравнение, като използваме диаметъра на най-малкото изображение и 100 mm за разстоянието. Получаваме:

$$D = \delta \cdot r = 31 \cdot 100 = 3100$$

След като измерим диаметрите на изображенията на Луната използваме стойността на константата и пресмятаме разстоянията до Луната за всички дати на наблюденията.

Разстоянията са в милиметри, като най-голямото е 100 mm.

За да построим орбитата, трябва да знаем посоките към Луната в съответните моменти. Тях ги пресмятаме от датите на наблюденията. Когато Луната е в пълнолуние, тя се намира относно Земята в посока, противоположна на посоката към Слънцето. Всеки лунен месец Земята се придвижва на определен ъгъл по своята орбита. Посоката към Луната също се променя със стойност, равна на този ъгъл. За една година положенията на Луната в пълнолуние ще опишат лунната орбита, макар и с не голям брой положения.

Земята прави пълна обиколка около Слънцето за около 365.25 денонощия. Връзката между ъгъла на завъртане и количеството денонощия между наблюденията се дава от израза:

$$k_{\varphi} = \frac{360^{\circ}}{365.25^d} = 0.9856 \text{ deg/d}$$

Умножавайки с този израз интервалите време, изразени в денонощия – N^d , получаваме ъгъла φ , на който Луната е завъртяна при съответното пълнолуние:

$$\varphi = k_{\varphi} \cdot N^d$$

Пресмятаме по описания начин разстоянията и ъглите между дадените пълнолуния. След това ги използваме за да построим орбитата на Луната.

От най-отдалечената точка на орбитата построяваме голямата ѝ ос, която трябва да мине през положението на Земята, от което тръгнахме за да построим орбитата. Измерваме големината ѝ: $2a = 188.6 \text{ mm}$, откъдето следва, че $a = 94.3 \text{ mm}$. Измерваме разстоянието до Луната в перигея: $r_p = 88 \text{ mm}$. Това разстояние съответства на 356512 km.

Накрая намираме голямата полуос в километри:

$$a_{km} = \frac{a_{mm}}{r_{p,mm}} r_{p,km} = 382032 \text{ km}$$

Използваме III Закона на Кеплер, за да пресметнем масата на Земята:

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma T^2} = 5.92 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Критерии за оценяване (общо 14 т.):

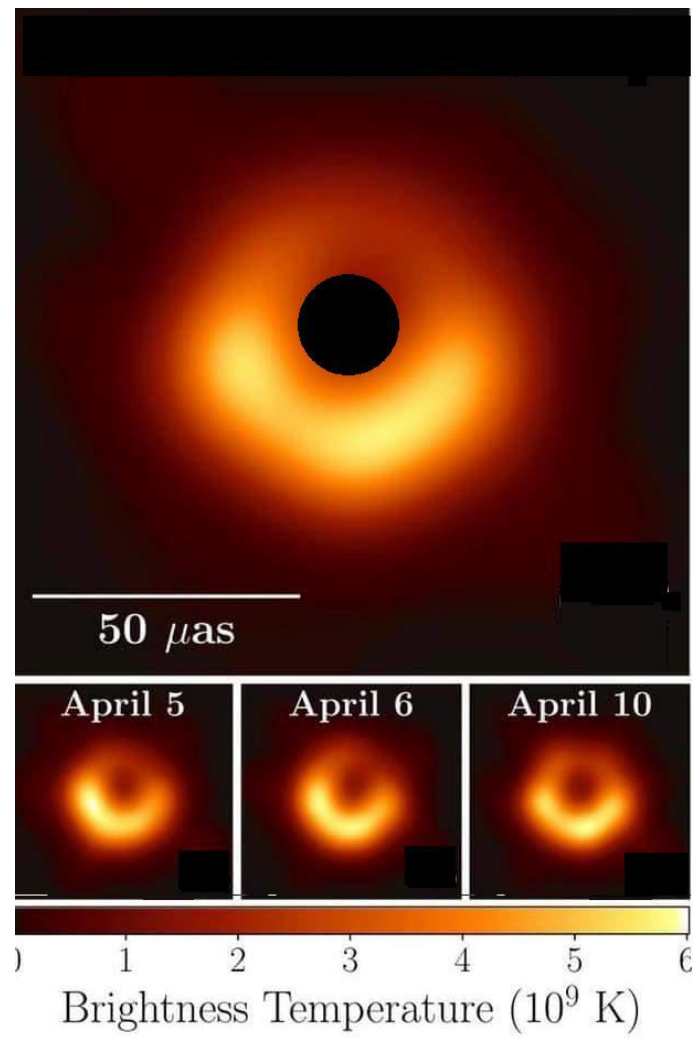
За правилен теоретичен метод за определяне на разстоянията до Луната – 2 т.

За измервания и пресмятания в мащаба на чертежа – 3 т.

За правилен метод за определяне на ъгловите отмествания на Луната – 2 т.

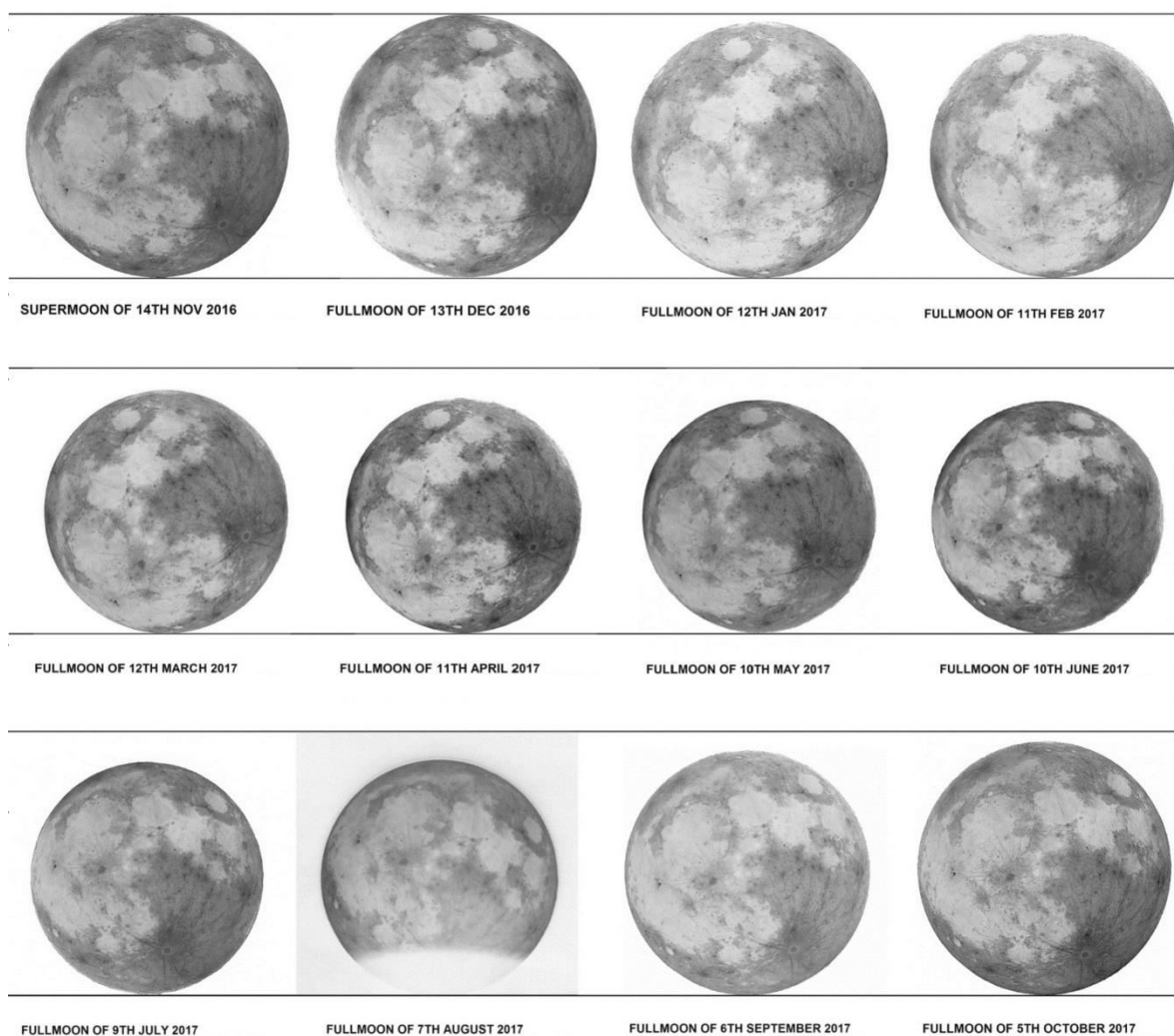
За изчисления, измервания и построяване на орбитата – 3 т.

За определяне на голямата полуос на орбитата и масата на Земята – 4 т.



Изображение на черната дупка в галактиката М 87.

FULL MOONS OF A YEAR (NOV 2016 - OCT 2017)



Фиг.2. Луната в пълнолуние за 12 последователни месеца.

XXII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
19-21 април 2019 г., Стара Загора

Тест 9-10 клас – решения

1. С: Средната плътност на Земята е около 5.5 g/cm^3

2. Е: Размерите на петте обекта са:

Луна: 3476 km

Йо: 3660 km

Тритон: 2706 km

Фобос: 27 km

Титан: 5148 km

3. С: Алтаир е на лятното небе, а Сириус – на зимното. Ъгловото разстояние е около 162 градуса.

4. D: Характерната температура на звезда от клас A0V е около 9600 K.

5. С: Числото на Волф е показател на Слънчевата активност, базиращ се на броя наблюдавани петна s и броя наблюдавани групи от петна g :

$$R = k(10g+s)$$

6. A: Ексцентрицитетът на орбитата на Меркурий е около 0.206

7. С: M101 е спирална галактика в съзвездията Голяма мечка (Ursa Major).

8. Е: Характерните периоди на пулсиране на променливите от тип Мира са 100-700 d.

9. 3.93 **1т:** 3.85-4.00

Кръговата скорост на повърхността е $v = (GM/R)^{1/2}$

Средната плътност на кълбо е $\rho = 3M/(4\pi R^3)$

Тоест $v^2 \sim M/R$ и $\rho \sim M/R^3$

Следователно $\rho \sim v^2/R^2$

Отношението на плътностите на Земята и Слънцето ще е $(109/55)^2 = 3.93$

10. 462 **1т:** 455-470 **0.5т:** 420-500

Видимият ъглов размер на Бетелгейзе е

$$\delta = 2R/r = 1.829 \times 10^{-7} \text{ rad} = 0.0377''$$

Собственото движение е $\mu = 0.029''/\text{yr}$

Търсеното време е $t = \delta/\mu = 1.266 \text{ yr} = 462 \text{ d}$

11. 24 **1т:** 23-25

Увеличението е $W = F/f$, $F = 1200 \text{ mm}$, $W = 50 \Rightarrow f = 24 \text{ mm}$

12. 0.328 **1т:** 0.32-0.34 **0.5т:** 0.30-0.35

В перихелий $T_p = -100^\circ \text{ C} = 173.15 \text{ K}$

В афелий $T_A = -150^\circ \text{ C} = 123.15 \text{ K}$

Осветеността зависи от разстоянието до звездата като $E \sim 1/r^2$

Мощността на преизлъчената енергия е пропорционална на осветеността $P \sim E$

Мощността на топлинното лъчение зависи от температурата като $P \sim T^4$

Следователно $r \sim 1/T^2$

Отношението на разстоянията в перихелий и афелий е

$$r_p/r_A = (T_A/T_p)^2 = 0.506 = (1-e)/(1+e)$$

Решаваме за ексцентрицитета и $e = 0.328$

13. 14.84 **1т:** 14.6-15.1 **0.5т:** 13-17

Ако орбитата на Луната беше двойно по-голяма, от III Закон на Кеплер орбиталният ѝ период щеше да бъде $T_{\text{sid}} = 27.32 \times 2^{3/2} \text{ d} = 77.27 \text{ d}$

Времето между два последователни изгрева на Луната T е синодичен период за орбиталния период на Луната T_{sid} и звездното денонощие (ротационния период на Земята $T_{\text{rot}} = (23\text{h}56\text{m}04\text{s}/24\text{h}) \text{ d} = (86164/86400) \text{ d}$):

$$1/T_{\text{rot}} = 1/T_{\text{sid}} + 1/T$$

Резултатът е $T = 1.010308 \text{ d}$ (не трябва да се закръгля!)

Забавянето на изгрева спрямо предния ден, в минути, е $(T - 1 \text{ d}) \times 24 \times 60 = 14.8 \text{ min}$

14. 147

1т: 138-150

0.5т: 120-170

Скоростта на Земята по орбитата е средно $v_E = 2\pi(1\text{AU})/1\text{yr} = 29.8 \text{ km/s}$

Кръговата скорост е $v = (GM/r)^{1/2}$

Следователно, кръговата скорост на Юпитер е $v_J = 29.8/(5.2)^{1/2} \text{ km/s} = 13.07 \text{ km/s}$

Продължителността на окултацията е времето, за което Юпитер изминава напречно диаметъра си $D = 142\,980 \text{ km}$ в отправна система, в която Земята е неподвижна. В такава отправна система скоростта на Юпитер е $v_J - v_E$

Търсеното време е $D/(v_J - v_E) = 142 \text{ min}$

Ако се използва ексцентрицитетът на Земята и се разгледа Земя в афелий, стойността достига 147 min.